

Скорость волновых течений под плавающим упругим льдом, формируемых при нелинейном взаимодействии волновых гармоник

А. А. Букатов

Морской гидрофизический институт РАН, Севастополь, Россия
✉ newisland@list.ru

Поступила в редакцию 04.10.2021 г.

Цель. Цель работы – исследование зависимости скорости движения однородной жидкости в направлении распространения волны, сформированной при нелинейном взаимодействии волновых гармоник, от характеристик ледового покрова.

Методы и результаты. На основе потенциала скорости движения жидкости конечной глубины, полученного в виде асимптотического разложения до величин третьего порядка малости, проанализирована скорость движения частиц жидкости под плавающим упругим льдом при нелинейном взаимодействии волновых гармоник. Изучено влияние толщины и модуля упругости ледового покрова, нелинейности вертикального ускорения льда, амплитуды второй взаимодействующей гармоники на составляющие орбитальной скорости движения жидких частиц под плавающим льдом.

Выводы. Показано, что влияние нелинейности ускорения вертикальных смещений плавающего льда на составляющие скорости движения жидкости проявляется в увеличении фазового сдвига. Смена знака второй взаимодействующей гармоники приводит к преобразованию профилей и к уменьшению фазы. Увеличение значения модуля Юнга проявляется в заметном увеличении фазового сдвига и слабом росте максимальных значений составляющих скорости движения жидкости в сравнении со случаем, когда лед отсутствует.

Ключевые слова: нелинейное взаимодействие волн, изгибно-гравитационные волны, волны конечной амплитуды, движение частиц жидкости

Благодарности: работа выполнена в рамках государственного задания по теме № 0555-2021-0004.

Для цитирования: Букатов А. А. Скорость волновых течений под плавающим упругим льдом, формируемых при нелинейном взаимодействии волновых гармоник // Морской гидрофизический журнал. 2022. Т. 38, № 1. С. 5–17. doi:10.22449/0233-7584-2022-1-5-17

Velocity of the Wave Currents under the Floating Elastic Ice Formed by Nonlinear Interaction of the Wave Harmonics

A. A. Bukatov

Marine Hydrophysical Institute, Russian Academy of Sciences, Sevastopol, Russia
✉ newisland@list.ru

Purpose. The aim of the paper is to study dependence of the homogeneous fluid movement velocity (moving in the direction of wave propagation and formed by nonlinear interaction of the wave harmonics) upon the characteristics of the ice cover.

© Букатов А. А., 2022

Methods and Results. Based on the movement velocity potential of the fluid of finite depth obtained in a form of an asymptotic expansion up to the values of the third order of smallness, analyzed was the velocity of fluid particles movement under the floating elastic ice at nonlinear interaction of the wave harmonics. Influence of the ice cover thickness and elasticity module, nonlinearity of the ice vertical acceleration, and the amplitude of the second interacting harmonic upon the components of the orbital velocity of the fluid particles movement under the floating ice was studied.

Conclusions. It is shown that the influence of nonlinearity of the vertical displacements acceleration of floating ice upon the components of the fluid movement velocity is manifested in an increase of the phase shift. A change of a sign of the second interacting harmonic results in transformation of the profiles and in decrease of the phase. Growth of the Young's modulus value is manifested in a noticeable increase of the phase shift and in a weak increase of the maximum values of the fluid movement velocity components as compared to the case when there is no ice.

Keywords: nonlinear interaction of waves, flexural-gravitational waves, waves of finite amplitude, motion of fluid particles

Acknowledgements: the investigation was carried out within the framework of the state task on theme No. 0555-2021-0004.

For citation: Bukatov, A.A., 2022. Velocity of the Wave Currents under the Floating Elastic Ice Formed by Nonlinear Interaction of the Wave Harmonics. *Physical Oceanography*, [e-journal] 29(1), pp. 3-14. doi:10.22449/1573-160X-2022-1-3-14

Введение

Скорости поступательного перемещения жидкости в направлении движения волн конечной амплитуды изучались в работах [1–3] при бесконечной, а в [4–6] при конечной глубине бассейна со свободной поверхностью. В линейной постановке влияние плавающего битого льда на скорость волновых течений в однородной жидкости исследовано в статье [7]. Зависимость составляющих орбитальной скорости движения частиц жидкости с открытой поверхностью от характеристик бегущей периодической волны конечной амплитуды изучена в [8], а под плавающим упругим ледовым покровом – в работе [9]. Экспериментальные исследования влияния скорости подледных течений на параметры изгибно-гравитационных волн представлены в [10].

В настоящей работе на основе полученного решения задачи о колебаниях, формируемых при нелинейном взаимодействии гармоник прогрессивных поверхностных волн в системе лед – жидкость [11], проанализирована зависимость распределения составляющих орбитальной скорости движения частиц однородной жидкости по длине сформированной волны от характеристик ледового покрова. Полученные результаты могут быть использованы для интерпретации результатов лабораторных и натурных наблюдений, при разработке технологий и систем мониторинга морских бассейнов в ледовый период.

Постановка задачи

Рассмотрим однородную идеальную несжимаемую жидкость постоянной глубины H , ее поверхность покрыта плавающим льдом с толщиной $h = \text{const}$. Жидкость и ледовый покров в горизонтальных направлениях не ограничены. Изучим влияние льда на орбитальные скорости движения жидких частиц, формируемые при взаимодействии двух гармоник волн конечной амплитуды. Предположим движение жидкости потенциальным, колебания льда безот-

рывными, безразмерные переменные $x = kx_1$, $z = kz_1$, $t = \sqrt{kg} t_1$, $\zeta = k\zeta^*$, $\varphi = (k^2/\sqrt{kg})\varphi^*$, где k – волновое число; g – ускорение силы тяжести; t – время; $\varphi(x, z, t)$ – потенциал скорости движения жидкости, тогда задача заключается в решении уравнения Лапласа

$$\varphi_{xx} + \varphi_{zz} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad -H \leq z \leq \zeta \quad (1)$$

для потенциала скорости с граничными условиями на поверхности лед – жидкость ($z = \zeta$)

$$D_1 k^4 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + \kappa k \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] = p, \quad (2)$$

$$p = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \zeta - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right]$$

и на дне ($z = -H$) бассейна

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

В начальный момент времени ($t = 0$)

$$\zeta = f(x), \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0. \quad (4)$$

Здесь

$$D_1 = \frac{D}{\rho g}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \kappa = h \frac{\rho_1}{\rho},$$

E , h , ρ_1 , ν – модуль нормальной упругости, толщина, плотность, коэффициент Пуассона льда соответственно; ρ – плотность жидкости; $\zeta(x, t)$ – возвышение поверхности лед – жидкость, в начальный момент времени равно функции $f(x)$. Потенциал скорости и возвышение поверхности лед – жидкость при $z = \zeta$ связаны кинематическим условием

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

В динамическом условии (2) выражение со множителем κ представляет собой инерцию вертикальных смещений льда, где первое слагаемое в скобках этого выражения характеризует нелинейность его вертикального ускорения [11].

Выражения для составляющих орбитальной скорости движения частиц жидкости

Решение задачи (1) – (5) было найдено методом многих масштабов [12] в виде уравнений для трех приближений, учитывающих нелинейность ускорения вертикальных смещений упругого льда [11]. Рассмотрим периодические волны, задавая функцию $f(x)$ в соответствующем виде. Для случая взаимодействия бегущих периодических волн, когда первое приближение задано в виде

$$\zeta_1 = \cos \theta + a_1 \cos 2\theta, \quad \theta = x + \tau T_0 + \beta(T_1, T_2),$$

где a_1 – амплитуда второй взаимодействующей гармоники; $T_1 = \varepsilon t$, $T_2 = \varepsilon^2 t$, а $\beta(T_1, T_2)$ определяется из второго и третьего приближений, выражение, определяющее потенциал скорости с точностью до третьего приближения в безразмерных переменных, имеет вид

$$\varphi = \varepsilon b_{11} \operatorname{ch}(z + H) \sin \theta + \sum_{n=1}^3 \varepsilon^n b_{n2} \operatorname{ch} 2(z + H) \sin 2\theta + \\ + \sum_{n=2}^3 \varepsilon^n \sum_{j=3}^4 b_{nj} \operatorname{ch} j(z + H) \sin j\theta + \varepsilon^3 \sum_{n=5}^6 b_{3n} \operatorname{ch} n(z + H) \sin n\theta + \sum_{n=2}^3 \varepsilon^n b_{n0} t,$$

$$\theta = x + \sigma t, \quad \sigma = \tau + \varepsilon \sigma_1 + \varepsilon^2 \sigma_2, \quad \varepsilon = ak.$$

Здесь

$$\tau^2 = (1 + D_1 k^4) (1 + \kappa k \operatorname{th} H)^{-1} \operatorname{th} H,$$

$$b_{11} = \frac{\tau}{\operatorname{sh} H}, \quad b_{12} = a_1 \frac{\tau}{\operatorname{sh} 2H},$$

$$b_{20} = \tau^2 \left(a_1^2 (1 + \operatorname{cth}^2 2H) + \frac{1}{4} (1 + \operatorname{cth}^2 H) + \kappa k \left(\frac{1}{2} \operatorname{cth} H + 4a_1^2 \operatorname{cth} 2H \right) \right),$$

$$b_{23} = \frac{l_3 \mu_3 + 3l_7 \tau}{3 \operatorname{sh} 3H (\mu_3 - 9\kappa k \tau^2 - 3\tau^2 \operatorname{cth} 3H)},$$

$$b_{24} = \frac{l_4 \mu_4 + 4l_8 \tau}{3 \operatorname{sh} 4H (\mu_4 - 16\kappa k \tau^2 - 4\tau^2 \operatorname{cth} 4H)},$$

$$b_{30} = a_1 \tau^2 \left(2 \operatorname{cth} 2H + \frac{1}{2} \operatorname{cth} H + \kappa k \left(\frac{9}{4} + 2 \operatorname{cth} 2H \operatorname{cth} H - \frac{1}{4} \operatorname{cth}^2 H \right) \right),$$

$$b_{3i} = \frac{j_i \mu_i + i m_i \tau}{i \operatorname{sh} iH (\mu_i - i^2 \tau^2 \kappa k - i \tau^2 \operatorname{cth} iH)}, \quad i = 3 \dots 6, \quad \mu_i = 1 + i^4 D_1 k^4, \quad i = 1 \dots 6,$$

$$a_{23} = \mu_3^{-1} (l_7 + 3\tau b_{23} (\operatorname{ch} 3H - \kappa k 3 \operatorname{sh} 3H)),$$

$$a_{24} = \mu_4^{-1} (l_8 + 4\tau b_{24} (\operatorname{ch} 4H - \kappa k 4 \operatorname{sh} 4H)),$$

$$a_{3i} = (i\tau b_{3i} (\operatorname{ch} iH + i\kappa k \operatorname{sh} iH) + m_i) \mu_i^{-1}, \quad i = 3 \dots 6,$$

$$a_1 = \pm \left(\frac{\mu_2 r_1}{4r_2 (2\tau^2 \operatorname{cth} 2H + 4\tau^2 \kappa k + \mu_2) (1 + 2\kappa k \operatorname{th} 2H)} \right)^{1/2},$$

$$r_1 = \left(2\text{cth}H + \text{th}2H \left(\text{cth}H \left(\frac{1}{2}\text{cth}H + 3\kappa k \right) - \frac{5}{2} \right) \right) \left(\tau^2(\text{cth}H + \kappa k) + \mu_1 \right),$$

$$r_2 = \tau^2 \left(\frac{1}{2} + \text{cth}2H \text{cth}H - \kappa k \left(\text{cth}2H - \frac{5}{2}\text{cth}H \right) \right) + \mu_1 \left(\frac{1}{2}\text{cth}H + \text{cth}2H \right),$$

$$l_3 = -\frac{3}{2}a_1\tau(2\text{cth}2H + \text{cth}H), \quad l_4 = -4a_1^2\text{cth}2H,$$

$$l_7 = a_1\tau^2 \left(\frac{11}{2} - \text{cth}2H \text{cth}H + \kappa k \left(5\text{cth}2H - \frac{1}{2}\text{cth}H \right) \right),$$

$$l_8 = a_1^2\tau^2 \left(5 - \text{cth}^2 2H + 4\kappa k \text{cth}2H \right),$$

$$j_3 = -\frac{5}{8}\tau - \frac{3}{8}a_1^2\tau - 6b_{24}\text{ch}4H - \frac{3}{2}a_{24}\tau\text{cth}H + 3a_{23}\sigma_1,$$

$$j_4 = -\frac{9}{2}a_1\tau - 6b_{23}\text{ch}3H - 2a_{23}\tau\text{cth}H + 4a_{24}\sigma_1,$$

$$j_5 = -\frac{69}{8}a_1^2\tau - 10b_{24}\text{ch}4H - \frac{5}{2}a_{24}\tau\text{cth}H - 5a_1 \left(\frac{3}{2}b_{23}\text{ch}3H - a_{23}\tau\text{cth}2H \right),$$

$$j_6 = -5a_1^3\tau - 6a_1(2b_{24}\text{ch}4H - a_{24}\tau\text{cth}2H),$$

$$\sigma_1 = \frac{\tau\mu_2 \left(2\text{cth}H + \text{th}2H \left(\text{cth}H \left(\frac{1}{2}\text{cth}H + 3\kappa k \right) - \frac{5}{2} \right) \right)}{4a_1(2\tau^2\text{cth}2H + 4\tau^2\kappa k + \mu_2)(1 + 2\kappa k \text{th}2H)},$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{4} \left(\frac{q_1}{\mu_1} + \frac{q_2}{2a_1\mu_2} \right),$$

$$m_3 = \tau \left(\frac{9}{2}a_1\sigma_1 + 2b_{24}\text{ch}4H(2\text{th}4H - \text{cth}H) \right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\tau^2 \left(\frac{1}{4}\text{cth}H(1 - 23a_1^2) + 7a_1^2\text{cth}2H - 3a_{24} \right) + 3b_{23}\sigma_1\text{ch}3H +$$

$$+ \kappa k \left(\tau \left(2b_{24}\text{sh}4H(1\text{lcth}4H - 4\text{cth}H) + 3a_1\sigma_1 \left(2\text{cth}2H + \frac{1}{2}\text{cth}H \right) \right) \right) +$$

$$+ \tau^2 \left(a_1^2 \left(\frac{21}{8} - 2\text{cth}^2 2H - \frac{7}{2}\text{cth}H \text{cth}2H \right) - \frac{1}{8} - \frac{3}{2}a_{24}\text{cth}H - \frac{1}{2}\text{cth}^2 H \right) + 9b_{23}\sigma_1\text{sh}3H \Big),$$

$$\begin{aligned}
m_4 = & \tau \left(4\sigma_1 a_1^2 + \frac{3}{2} b_{23} \operatorname{ch} 3H (5 \operatorname{th} 3H - \operatorname{cth} H) \right) + 2\tau^2 \left(a_1 \operatorname{cth} 2H - \frac{1}{4} a_1 \operatorname{cth} H + a_{23} \right) + \\
& + 4b_{24} \sigma_1 \operatorname{ch} 4H + \kappa k \left(\tau \left(\frac{3}{2} b_{23} \operatorname{sh} 3H (1 \operatorname{lcth} 3H - 3 \operatorname{cth} H) + 8a_1^2 \sigma_1 \operatorname{cth} 2H \right) + \right. \\
& \left. + \tau^2 \left(a_1 \left(\frac{37}{4} - 4 \operatorname{cth} 2H \operatorname{cth} H - \frac{3}{4} \operatorname{cth}^2 H \right) + 2a_{23} \operatorname{cth} H \right) + 16b_{24} \sigma_1 \operatorname{sh} 4H \right), \\
m_5 = & \tau \left(2b_{24} \operatorname{ch} 4H (6 \operatorname{th} 4H - \operatorname{cth} H) + 3b_{23} a_1 \operatorname{ch} 3H \left(\frac{7}{2} \operatorname{th} 3H - \operatorname{cth} 2H \right) \right) + \\
& + \tau^2 \left(\frac{7}{2} a_1^2 \left(\operatorname{cth} 2H - \frac{1}{4} \operatorname{cth} H \right) + 5a_{23} a_1 + \frac{5}{2} a_{24} \right) + \\
& + \kappa k \left(\tau \left(2b_{24} \operatorname{sh} 4H (19 \operatorname{cth} 4H - 4 \operatorname{cth} H) + 3b_{23} a_1 \operatorname{sh} 3H \left(\frac{11}{2} \operatorname{cth} 3H - 3 \operatorname{cth} 2H \right) \right) + \right. \\
& \left. + \tau^2 \left(-a_1^2 \left(\frac{3}{8} + 6 \operatorname{cth}^2 2H + \frac{11}{2} \operatorname{cth} 2H \operatorname{cth} H \right) + 10a_{23} a_1 \operatorname{cth} 2H + \frac{5}{2} a_{24} \operatorname{cth} H \right) \right), \\
m_6 = & 4\tau b_{24} a_1 \operatorname{ch} 4H (4 \operatorname{th} 4H - \operatorname{cth} 2H) + \tau^2 a_1 (a_1^2 \operatorname{cth} 2H + 6a_{24}) + \\
& + 2\kappa k a_1 (4\tau b_{24} \operatorname{sh} 4H (5 \operatorname{cth} 4H - 2 \operatorname{cth} 2H) + \tau^2 (6a_{24} \operatorname{cth} 2H - a_1^2 (1 + 4 \operatorname{cth}^2 2H))), \\
q_1 = & \mu_1 \left(\frac{3}{2} b_{23} a_1 \operatorname{ch} 3H - \tau \left(\frac{3}{8} - \frac{15}{4} a_1^2 + a_{23} a_1 \operatorname{cth} 2H \right) \right) + \tau^2 a_1 \left(-\frac{1}{2} \sigma_1 + \right. \\
& \left. + 3b_{23} \operatorname{ch} 3H \left(\frac{1}{2} \operatorname{th} 3H + \operatorname{cth} 2H \right) \right) + \tau^3 \left(9a_1^2 \operatorname{cth} 2H + a_1 a_{23} + \frac{1}{4} \operatorname{cth} H \left(\frac{5}{2} - a_1^2 \right) \right) + \\
& + \kappa k \left(\tau^2 a_1 \left(3b_{23} \operatorname{sh} 3H \left(\frac{1}{2} \operatorname{cth} 3H + 3 \operatorname{cth} 2H \right) - 2\sigma_1 \operatorname{cth} 2H + \frac{1}{2} \sigma_1 \operatorname{cth} H \right) + \right. \\
& \left. + \tau^3 \left(2a_{23} a_1 \operatorname{cth} 2H + \frac{1}{2} \operatorname{cth}^2 H + \frac{3}{8} + a_1^2 \left(8 \operatorname{cth}^2 2H + \operatorname{cth} H \operatorname{cth} 2H + \frac{39}{4} \right) \right) \right), \\
q_2 = & \mu_2 (3b_{23} \operatorname{ch} 3H + 4b_{24} a_1 \operatorname{ch} 4H + \tau (a_{23} \operatorname{cth} H + 2a_{24} a_1 \operatorname{cth} 2H - 3a_1^3)) + \\
& + 2\tau^2 \left(\frac{3}{2} b_{23} \operatorname{ch} 3H (\operatorname{cth} H - \operatorname{th} 3H) + 4b_{24} a_1 \operatorname{cth} 2H \operatorname{ch} 4H - \sigma_1 \right) + \\
& + 2\tau^3 (a_{23} + a_1 (3a_1 \operatorname{cth} H + 2a_{24} + \operatorname{cth} 2H (5a_1^2 - 2))) + \\
& + \kappa k \left(2\tau^2 \left(\frac{3}{2} b_{23} \operatorname{sh} 3H (3 \operatorname{cth} H - 5 \operatorname{cth} 3H) + 8b_{24} a_1 \operatorname{sh} 4H (2 \operatorname{cth} 2H - \operatorname{cth} 4H) - \sigma_1 \operatorname{cth} H \right) + \right. \\
& \left. + 2\tau^3 \left(2a_1^3 (3 + 4 \operatorname{cth} 2H) + a_1 \left(4 \operatorname{cth} 2H (a_{24} + \operatorname{cth} H) + \frac{1}{2} \operatorname{cth}^2 H - \frac{3}{2} \right) + a_{23} \operatorname{cth} H \right) \right).
\end{aligned}$$

При этом $b_{22} = b_{32} = a_2 = a_3 = l_1 = l_2 = l_5 = l_6 = j_1 = j_2 = m_1 = m_2 = 0$. В размерных переменных выражение для потенциала скорости имеет следующий вид:

$$\varphi = a\sqrt{g/k} \sum_{n=1}^2 b_{1n} \operatorname{ch} nk(z+H) \sin n\theta + a^2\sqrt{kg} \left(\sum_{n=3}^4 b_{2n} \operatorname{ch} nk(z+H) \sin n\theta + b_{20}t \right) +$$

$$+ a^3k\sqrt{kg} \left(\sum_{n=3}^6 b_{3n} \operatorname{ch} nk(z+H) \sin n\theta + b_{30}t \right),$$

$$\theta = kx + \sqrt{kg}(\tau + ak\sigma_1 + a^2k^2\sigma_2)t,$$

а в выражениях для b_{20} , b_{30} , b_{11} , b_{12} , b_{23} , b_{24} , b_{33} , b_{34} , b_{35} , b_{36} , σ_1 , σ_2 аргумент гиперболических функций заменяется на kH . Здесь и далее для выражений в размерных переменных у символов « x », « z », « t » опущен индекс 1, а у « φ » – знак «*».

Таким образом, горизонтальная ($u = \partial\varphi/\partial x$) и вертикальная ($w = \partial\varphi/\partial z$) составляющие скорости движения однородной жидкости определяются выражениями

$$u = a\sqrt{kg} \sum_{n=1}^2 nb_{1n} \operatorname{ch} nk(z+H) \cos n\theta + a^2k\sqrt{kg} \sum_{n=3}^4 nb_{2n} \operatorname{ch} nk(z+H) \cos n\theta +$$

$$+ a^3k^2\sqrt{kg} \sum_{n=3}^6 nb_{3n} \operatorname{ch} nk(z+H) \cos n\theta,$$

$$w = a\sqrt{kg} \sum_{n=1}^2 nb_{1n} \operatorname{sh} nk(z+H) \sin n\theta + a^2k\sqrt{kg} \sum_{n=3}^4 nb_{2n} \operatorname{sh} nk(z+H) \sin n\theta +$$

$$+ a^3k^2\sqrt{kg} \sum_{n=3}^6 nb_{3n} \operatorname{sh} nk(z+H) \sin n\theta.$$

Отметим, что полученное решение справедливо вне малых окрестностей резонансных значений волновых чисел k_i ($i = 1 \dots 4$), являющихся положительными действительными корнями уравнений [11]

$$\mu_i - i^2\tau^2kk - i\tau^2\operatorname{cth}iH = 0, i = 3 \dots 6. \quad (6)$$

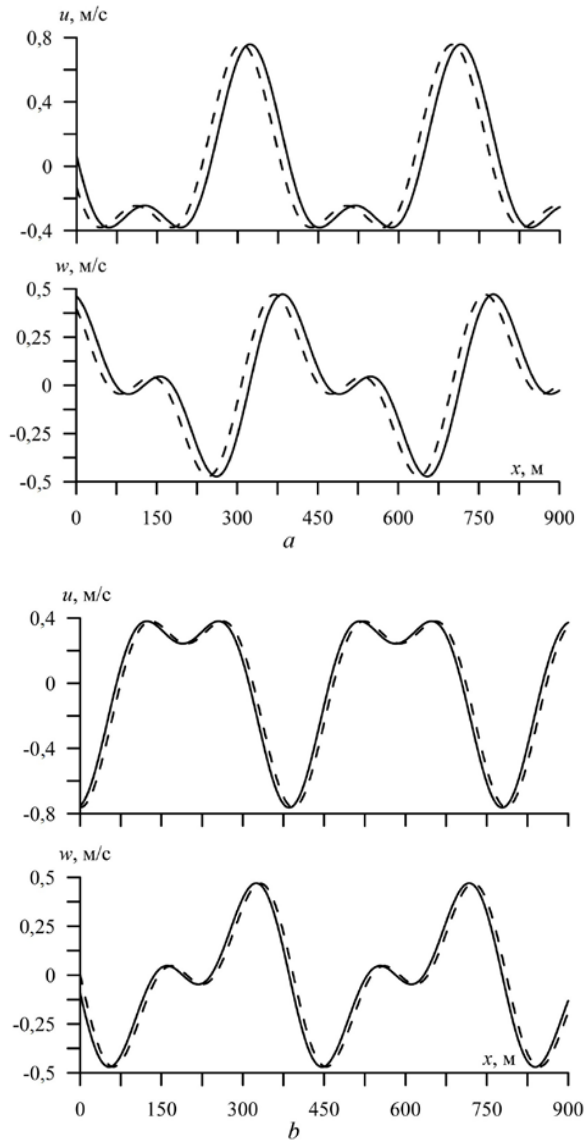
Левая часть выражения (6) входит в знаменатель b_{3i} .

Анализ влияния ледового покрова на составляющие скорости движения жидкости

Оценка влияния характеристик плавающего льда на составляющие скорости в направлении движения нелинейной волны выполнялась при $\rho_1/\rho = 0,87$, $\nu = 0,34$, $0 \leq h \leq 2$ м и E , равном $0, 5 \cdot 10^8$; 10^9 ; $3 \cdot 10^9$ Н/м².

Распределения u и w вдоль профиля волны представлены на рис. 1 при $t = 3$ с, $a = 1$ м, $\lambda = 392,5$ м, $H = 45$ м, $h = 1$ м, $E = 3 \cdot 10^9$ Н/м² с учетом и без учета вертикального ускорения льда. Видно, что при распространении сформированной нелинейной волны в отрицательном направлении оси X влияние учета нелинейности ускорения вертикальных смещений льда на составляю-

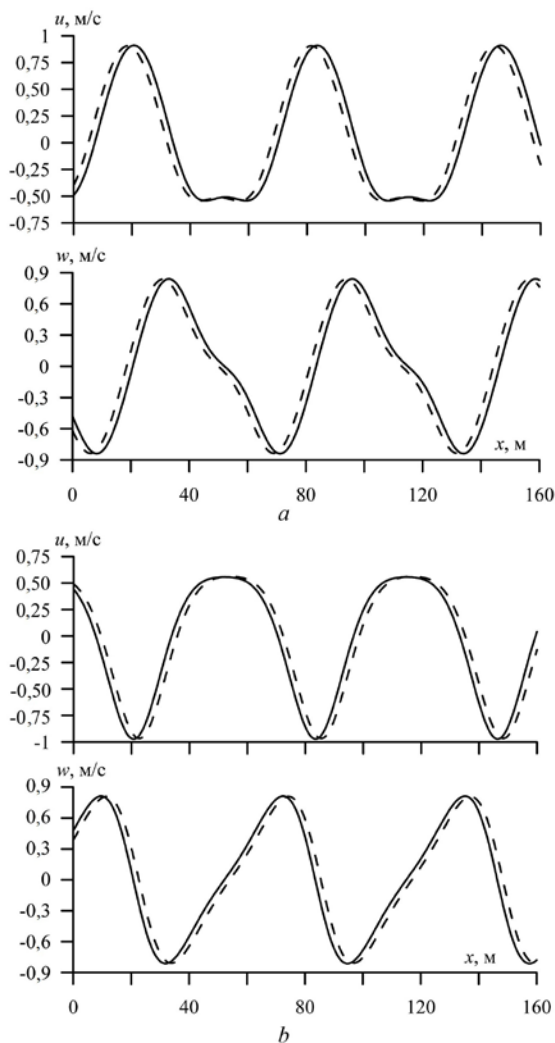
щие скорости движения жидкости проявляется в увеличении фазового сдвига. Смена знака второй взаимодействующей гармоники с плюса на минус приводит к заметному преобразованию профилей и к уменьшению фазы (рис. 1, *b*). Профили u и w , полученные с учетом нелинейности вертикального ускорения, отстают от профилей, полученных без ее учета. Форма образованного возмущения является нелинейной.



Р и с. 1. Распределение составляющих скорости движения жидкости вдоль профиля нелинейной волны при $a_1 > 0$ (*a*) и $a_1 < 0$ (*b*) при $\lambda/H = 8,72$ с учетом (штриховая линия) и без учета (сплошная линия) вертикального ускорения льда

F i g. 1. Distribution of the components of the fluid movement velocity along the profile of a nonlinear wave at $a_1 > 0$ (*a*) and $a_1 < 0$ (*b*) at $\lambda/H = 8,72$ with the regard (dashed line) and with no regard (solid line) for the ice vertical acceleration

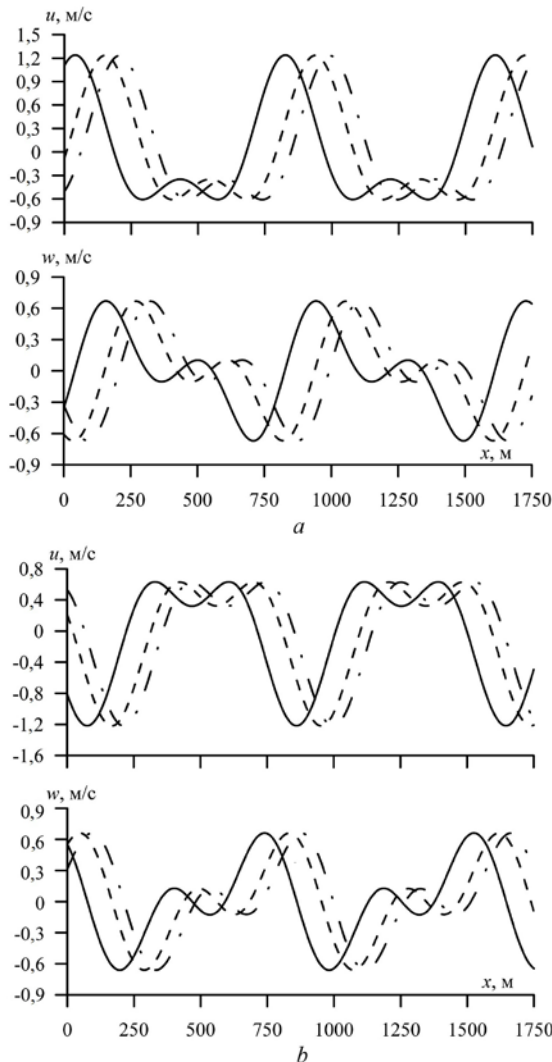
В случае коротких волн (рис. 2) влияние нелинейности вертикального ускорения сохраняет свою направленность, а форма профиля в диапазоне рассмотренных волновых чисел остается нелинейной. На рис. 2 представлено распределение составляющих скорости при $t = 540$ с, $a = 0,6$ м, $\lambda = 62,8$ м, $H = 70$ м, $h = 0,6$ м, $E = 3 \cdot 10^9$ Н/м². Для экстремальных значений на профиле горизонтальной составляющей скорости так же, как в линейном случае и в случае распространения периодической волны конечной амплитуды [9], значения вертикальной составляющей равны нулю. В то же время экстремальным значениям на профиле вертикальной составляющей скорости соответствуют ненулевые значения ее горизонтальной составляющей.



Р и с. 2. Распределение составляющих скорости движения жидкости вдоль профиля нелинейной волны при $a_1 > 0$ (a) и $a_1 < 0$ (b) при $\lambda/H = 0,89$ – с учетом (штриховая линия) и без учета (сплошная линия) вертикального ускорения льда

Fig. 2. Distribution of the components of the fluid movement velocity along the profile of a nonlinear wave at $a_1 > 0$ (a) and $a_1 < 0$ (b) at $\lambda/H = 0.89$ with the regard (dashed line) and with no regard (solid line) for the ice vertical acceleration

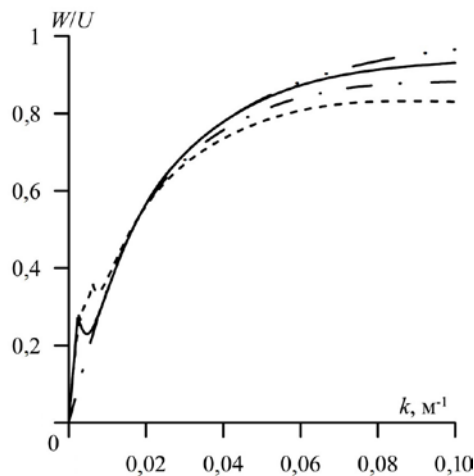
Влияние модуля упругости сплошного ледового покрова на составляющие скорости в случае учета вертикального ускорения льда представлено на рис. 3. Здесь $t = 9900$ с, $a = 2$ м, $\lambda = 785$ м, $H = 70$ м, $h = 2$ м. Из рисунка видно, что увеличение жесткости льда проявляется в заметном увеличении фазового сдвига и незначительном росте максимальных значений составляющих скорости движения жидкости. Смена знака a_1 с плюса на минус деформирует профиль качественно и количественно (рис. 3, *b*). При этом увеличение жесткости льда, как и при $a_1 > 0$, ведет к заметному увеличению фазы относительно фазового сдвига, когда $E = 0$.



Р и с. 3. Распределение составляющих скорости движения жидкости вдоль профиля нелинейной волны с учетом вертикального ускорения льда при $a_1 > 0$ (*a*) и $a_1 < 0$ (*b*). Сплошная линия соответствует значению $E = 3 \cdot 10^9$ Н/м², штриховая – $E = 10^9$ Н/м², штрихпунктирная – $E = 0$

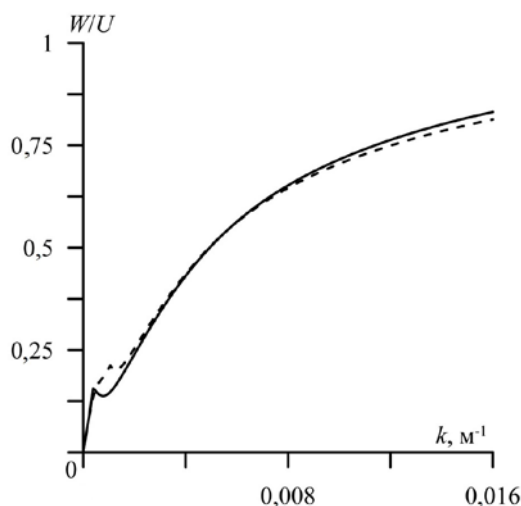
Fig. 3. Distribution of the components of the fluid movement velocity along the profile of a nonlinear wave with the regard for the ice vertical acceleration at $a_1 > 0$ (*a*) and $a_1 < 0$ (*b*). Solid line corresponds to value $E = 3 \cdot 10^9$ N/m², dashed line – to $E = 10^9$ N/m² and dashed-dotted one – to $E = 0$

Отношение максимальных величин вертикальной составляющей скорости (W) и горизонтальной составляющей скорости (U) для случая битого льда ($h \neq 0, E = 0$) при учете нелинейности вертикального ускорения и для случая, когда лед отсутствует ($h = 0$), представлено на рис. 4. Здесь $a = 1$ м, $H = 30$ м, $E = 0$. Сплошная линия – $h = 1$ м, $a_1 > 0$; штриховая – $h = 1$ м, $a_1 < 0$; штрихпунктирная с двумя точками – $h = 0$, $a_1 > 0$; штрихпунктирная – линейное приближение при $h = 1$ м, $a_1 > 0$. Из анализа графиков следует, что в рассматриваемом диапазоне волновых чисел распределение значений W/U по k меньше единицы, следовательно, при распространении сформированной нелинейной волны вертикальная составляющая скорости не превосходит горизонтальную. Это наблюдается и при распространении периодической волны конечной амплитуды [9]. В области малых значений волновых чисел изменение W/U происходит не монотонно, исключая линейное приближение. С ростом k при наличии льда уменьшаются значения отношения составляющих скорости по сравнению со случаем отсутствия ледового покрова на поверхности жидкости. При этом для линейного приближения значения отношения W/U , полученные при $a_1 > 0$ и $h \neq 0$, наименьшие.



Р и с. 4. Распределение величины отношения W/U по волновому числу при $E = 0$
Fig. 4. Distribution of the ratio W/U value over the wave number at $E = 0$

Влияние амплитуды второй взаимодействующей гармоники на отношение W/U при учете нелинейности вертикального ускорения льда и $E \neq 0$ показано на рис. 5 для длинноволнового диапазона волновых чисел, где отсутствуют резонансные значения [11]. Здесь $E = 3 \cdot 10^9$ Н/м², $H = 100$ м, $a = 1$ м, $h = 1$ м. Сплошная и штриховая линии соответствуют случаям $a_1 > 0$ и $a_1 < 0$ соответственно. Видно, что смена знака a_1 проявляется как в увеличении значений отношения W/U , так и в их уменьшении. С ростом k разница между значениями растет. Отметим, что в коротковолновом диапазоне величина отношения W/U при $E \neq 0$ и $a_1 > 0$ больше величины отношения W/U при $E = 0$ и $a_1 > 0$, а при $E \neq 0$ и $a_1 < 0$ меньше, чем при $E = 0$ и $a_1 < 0$.



Р и с. 5. Распределение величины отношения W/U по волновому числу при $E = 3 \cdot 10^9$ Н/м²
Fig. 5. Distribution of the ratio W/U value over the wave number at $E = 3 \cdot 10^9$ N/m²

Заклучение

На основе потенциала скорости движения жидкости конечной глубины, полученного в виде асимптотического разложения до величин третьего порядка малости, проанализирована скорость движения частиц жидкости под плавающим упругим льдом при нелинейном взаимодействии волновых гармоник. Изучено влияние толщины и модуля упругости ледового покрова, нелинейности вертикального ускорения льда, амплитуды второй взаимодействующей гармоники на составляющие орбитальной скорости движения жидких частиц под плавающим льдом. Исследовано влияние плавающего битого льда на составляющие скорости, а также рассмотрен случай распространения сформированной волны конечной амплитуды в бассейне со свободной поверхностью.

Показано, что влияние нелинейности ускорения вертикальных смещений плавающего льда на составляющие скорости движения жидкости проявляется в увеличении фазового сдвига. Смена знака второй взаимодействующей гармоники приводит к существенному преобразованию профилей и уменьшению фазы. Это влияние проявляется в случае как коротких, так и длинных волн. Таким образом, пренебрежение нелинейностью вертикального ускорения льда может привести к заметным погрешностям в определении фазового сдвига.

Увеличение значения модуля Юнга приводит к увеличению фазового сдвига и незначительному росту максимальных величин составляющих скорости движения жидкости с плавающим льдом в сравнении со случаем, когда лед отсутствует. Растет фаза и при увеличении толщины упругого льда, а в случае битого льда она уменьшается.

Отношение максимальных величин вертикальной и горизонтальной составляющих скорости в рассматриваемом диапазоне волновых чисел при модуле упругости, равном нулю, меньше единицы. Следовательно, при распро-

странении волны, сформированной при нелинейном взаимодействии волновых гармоник, вертикальная составляющая скорости не превосходит горизонтальную. Это наблюдается и при распространении периодической волны конечной амплитуды. Сравнение распределений отношения W/U , полученных с учетом и без учета нелинейности вертикального ускорения упругого льда, говорит о ее слабом влиянии на отношение. При этом смена знака амплитуды второй взаимодействующей гармоники как при отсутствии, так и при наличии упругости льда имеет заметное влияние.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нестеров С. В.* Возбуждение волн конечной амплитуды бегущей системой давлений // Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1968. Т. 4, № 10. С. 1123–1125.
2. *Ньюмен Д.* Морская гидродинамика. Л. : Судостроение, 1985. 367 с.
3. *Longuet-Higgins M.* Lagrangian moments and mass transport in Stokes waves // Journal of Fluid Mechanics. 1987. Vol. 179. P. 547–555. <https://doi.org/10.1017/S0022112087001654>
4. *Сретенский Л. Н.* Теория волновых движений жидкости. М. : Наука, 1977. 815 с.
5. *Алешков Ю. З.* Течения и волны в океане. СПб. : Изд-во С.-Петербургского университета, 1996. 224 с.
6. *Longuet-Higgins M. S.* Lagrangian moments and mass transport in Stokes waves. Part 2. Water of finite depth // Journal of Fluid Mechanics. 1988. Vol. 186. P. 321–336. <https://doi.org/10.1017/S0022112088000163>
7. *Букатов А. Е., Жарков В. В.* Влияние битого льда на скорость волновых течений при прохождении прогрессивных волн над уступом дна // Морской гидрофизический журнал. 2001. № 5. С. 3–14.
8. *Букатов Ант. А., Букатова О. М.* Скорости движения жидкости в бегущей периодической волне конечной амплитуды // Системы контроля окружающей среды. Севастополь : МГИ НАН Украины, 2008. Вып. 11. С. 269–271.
9. *Букатов Ант. А., Букатов Анд. А.* Скорости движения жидких частиц под плавающим ледяным покровом при распространении периодической волны конечной амплитуды // Морской гидрофизический журнал. 2011. № 1. С. 15–24.
10. Влияние подледного течения на параметры изгибно-гравитационных волн, возникающих от движения подводного судна под ледяным покровом / В. Л. Земляк [и др.] // Вестник Приамурского государственного университета им. Шолом-Алейхема. 2014. № 4 (17). С. 40–47.
11. *Букатов А. Е., Букатов А. А.* Колебания плавающей упругой пластины при нелинейном взаимодействии изгибно-гравитационных волн // Прикладная механика и техническая физика. 2018. Т. 59, № 4. С. 99–109. doi:10.15372/PMTF20180412
12. *Найфэ А. Х.* Методы возмущений. М. : Мир, 1976. 455 с.

Об авторе:

Букатов Антон Алексеевич, ведущий научный сотрудник, отдел океанографии, ФГБУН ФИЦ МГИ (299011, Россия, г. Севастополь, ул. Капитанская, д. 2), кандидат физико-математических наук, **ORCID ID: 0000-0002-1165-8428**, **ResearcherID: P-6733-2017**, newisland@list.ru